

10132 - Resistência dos materiais II

Evandro Paulo Folletto

Universidade do Oeste do Estado de Santa Catarina - Unoesc

2019

- 1 Introdução
- 2 Método de Cross
- 3 Método dos três momentos
- 4 Equação da linha elástica
- 5 Cálculo de deformações via métodos energéticos
- 6 Flambagem
- 7 Referências

- 1 Introdução
- 2 Método de Cross
- 3 Método dos três momentos
- 4 Equação da linha elástica
- 5 Cálculo de deformações via métodos energéticos
- 6 Flambagem
- 7 Referências

A disciplina de Resistência dos Materiais II é oferecida na 4ª fase do curso de Engenharia Civil da Unoesc. Esta disciplina irá fornecer conceitos importantes que estão relacionados, predominantemente, as disciplinas que ainda serão vistas na graduação, relacionadas a análise estrutural e dimensionamento, este último que pode ser madeira, aço ou concreto.

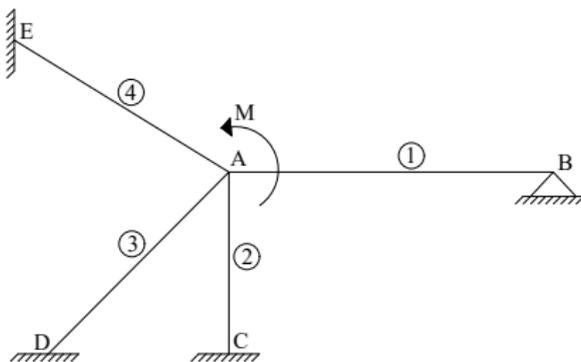
Aqui, na Resistência dos materiais II, vamos proceder da seguinte forma:

- Inicialmente estudaremos dois métodos - Equação dos três momentos e Cross - para cálculo de reações de apoio e desenho de diagramas de esforços internos de vigas contínuas hiperestáticas (emobra Crosss possa ser utilizado para resolver outros tipos de modelos estruturais.
- Na sequência, vamos proceder com os estudos de Equações da linha elástica, com as quais é possível obter expressões que nos mostram o comportamento da deformação de uma estrutura ou parte dela.
- Seguindo, passaremos calcular deformações em estruturas através do Teorema de Castigliano.
- Por fim, estudaremos os conceitos relacionados ao assunto de flambagem em barras.

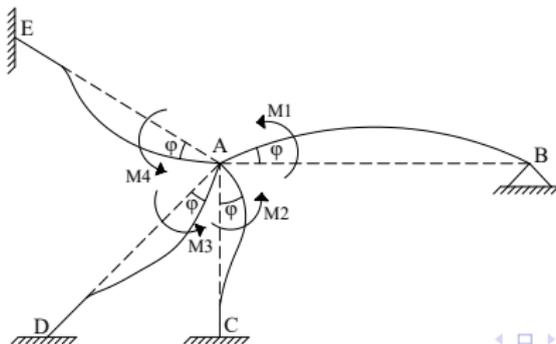
- 1 Introdução
- 2 Método de Cross**
- 3 Método dos três momentos
- 4 Equação da linha elástica
- 5 Cálculo de deformações via métodos energéticos
- 6 Flambagem
- 7 Referências

Método de Cross

Conforme Süsskind (1987), considerando-se o nó A da estrutura indicada abaixo, submetido a um momento fletor M :



Devido ao momento M , o nó A irá girar uma quantidade φ :



Devido ao momento aplicado, aparecem nas extremidades das barras 1,2,3 e 4 os momentos indicados, de módulos iguais a:

$$M_1 = K_1^A \cdot \varphi \quad (1)$$

$$M_2 = K_2^A \cdot \varphi \quad (2)$$

$$M_3 = K_3^A \cdot \varphi \quad (3)$$

$$M_4 = K_4^A \cdot \varphi \quad (4)$$

Por equilíbrio de momentos no nó, sabe-se que:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \quad (5)$$

Reescrevendo a expressão (5) utilizando (1), (2), (3) e (4):

$$M = K_1^A \cdot \varphi + K_2^A \cdot \varphi + K_3^A \cdot \varphi + K_4^A \cdot \varphi \quad (6)$$

Evidenciando-se o giro φ :

$$M = \varphi(K_1^A + K_2^A + K_3^A + K_4^A) \quad (7)$$

O termo entre parênteses é identificado como sendo a soma das rigidezes em A de todas as barras concorrentes a este nó, o qual pode ser escrito como:

$$\sum K_i \quad (8)$$

Substituindo esse termo na equação (7) anterior, tem-se:

$$M = \varphi(\sum K_i) \quad (9)$$

Reescrevendo (9) em fundação de φ :

$$\varphi = \frac{M}{\sum K_i} \quad (10)$$

Reescrevendo as expressões (1), (2), (3) e (4):

$$M_1 = \frac{K_1^A}{\sum K_i} \cdot M \quad (11)$$

$$M_2 = \frac{K_2^A}{\sum K_i} \cdot M \quad (12)$$

$$M_3 = \frac{K_3^A}{\sum K_i} \cdot M \quad (13)$$

$$M_4 = \frac{K_4^A}{\sum K_i} \cdot M \quad (14)$$

Generalizando o conceito observado nas equações (11), (12), (13) e (14), tem-se:

"a barra genérica **i** receberá uma parcela $\frac{K_i}{\sum K_i}$ do momento **M** aplicado no nó"

$$M_i = \frac{K_i^A}{\sum K_i} \cdot M \quad (15)$$

Da expressão (15) conclui-se:

uma carga momento aplicada num nó de uma estrutura indeslocável irá se distribuir entre as diversas barras concorrentes neste nó, segundo parcelas proporcionais à rigidez, neste nó, de cada uma destas barras.

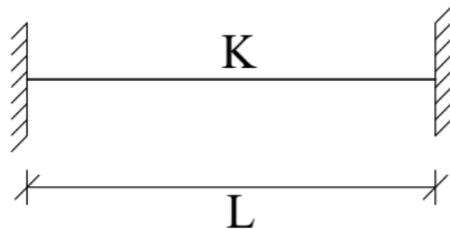
A relação $\frac{K_i}{\sum K_i}$ indicada anteriormente pode ser denominada de coeficiente de distribuição, desta forma:

$$d_i = \frac{K_i}{\sum K_i} \quad (16)$$

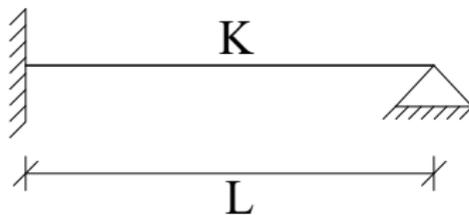
Utilizando (16), reescreve-se (15):

$$M_i = d_i \cdot M \quad (17)$$

Os coeficientes de rigidez pode ser obtidos avaliando a imagem abaixo:



$$K = \frac{4EI}{L}$$

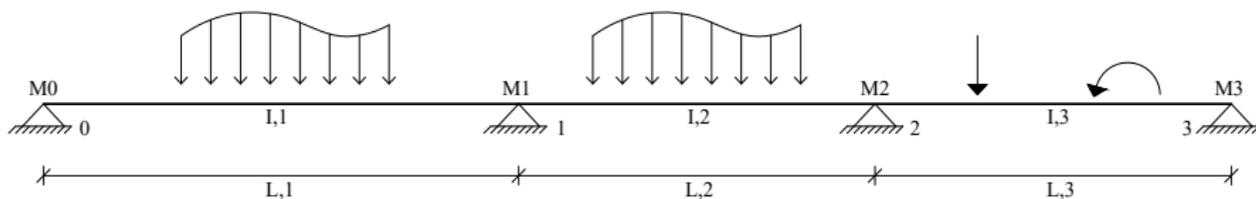


$$K = \frac{3EI}{L}$$

- 1 Introdução
- 2 Método de Cross
- 3 Método dos três momentos**
- 4 Equação da linha elástica
- 5 Cálculo de deformações via métodos energéticos
- 6 Flambagem
- 7 Referências

Método da equação dos 3 momentos

Observamos inicialmente uma viga com dois ou mais vãos, com todos os apoios capazes de oferecer reação vertical e carregamento apenas vertical com apoios de segundo gênero nas extremidades.

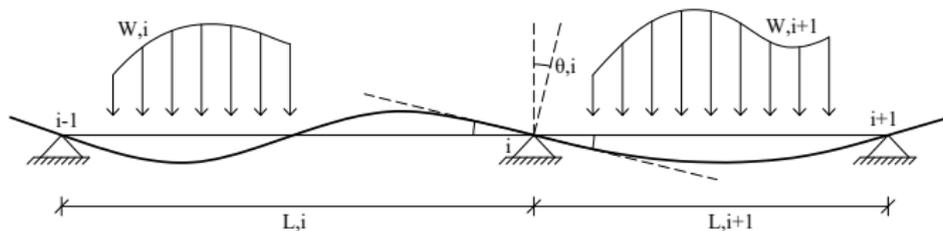


Observa-se o seguinte com relação as numerações:

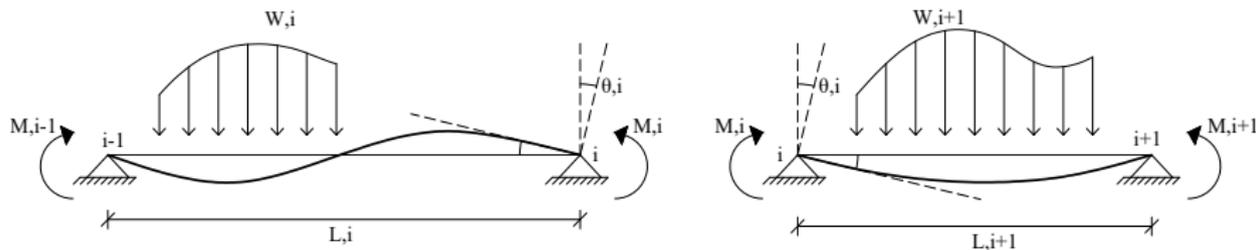
- os vãos são numerados da esquerda para a direita, a partir de 1, bem como os respectivos vãos L e momentos de inércia I de suas seções transversais;
- os apoios são numerados da esquerda para a direita, a partir de 0 (deste modo, o número do último apoio coincidirá com o do último vão);
- os momentos fletores desconhecidos (M_i) receberão índices numéricos iguais aos apoios correspondentes.

Formulação da solução

Mostra-se abaixo dois vãos adjacentes ao apoio i , assim como a deformação angular (rotação) da seção no encontro desses dois vãos vizinhos.



Ao separar os vãos i e $i+1$, cada um deles é submetido às suas respectivas cargas externas e momentos fletores nas suas extremidades, de modo que os seus eixos deformados são iguais à linha elástica àquela da viga contínua. Assim, as rotações sobre o apoio i são iguais para os dois vãos.



Assim, pode-se calcular as expressões para a rotação separadamente para cada um dos efeitos mostrado na imagem anterior: carga externa, momento fletor na extremidade esquerda e momento fletor na extremidade direita. As rotações podem ser expresas algebricamente usando-se o método das áreas dos diagramas de momentos fletores:

- Rotações do elemento i :

Rotação causada pelas cargas no vão:

$$\phi_{i,dir} = -\frac{A_j \cdot a_j}{L_j \cdot E \cdot I_j} \quad (18)$$

Rotação causada pelo momento M_{i-1} :

$$\phi'_{i,dir} = -\frac{M_{i-1} \cdot L_i}{6 \cdot E \cdot I_i} \quad (19)$$

Rotação causada pelo momento M_i :

$$\phi''_{i,dir} = -\frac{M_i \cdot L_i}{3 \cdot E \cdot I_i} \quad (20)$$

- Rotações do elemento $i + 1$:

Rotação causada pelas cargas no vão:

$$\phi_{i+1,esq} = \frac{A_{i+1} \cdot b_{i+1}}{L_{i+1} \cdot E \cdot I_{i+1}} \quad (21)$$

Rotação causada pelo momento M_{i-1} :

$$\phi'_{i+1,esq} = \frac{M_{i+1} \cdot L_{i+1}}{6 \cdot E \cdot I_{i+1}} \quad (22)$$

Rotação causada pelo momento M_i :

$$\phi''_{i+1,esq} = \frac{M_i \cdot L_{i+1}}{3 \cdot E \cdot I_{i+1}} \quad (23)$$

A partir do que já foi exposto, pode-se escrever que:

$$\phi_{i,dir} + \phi'_{i,dir} + \phi''_{i,dir} = \phi_{i+1,esq} + \phi'_{i+1,esq} + \phi''_{i+1,esq} \quad (24)$$

Substituindo (18), (19), (20), (21), (22), (23) em (24):

$$-\frac{A_i a_i}{L_i E I_i} - \frac{M_{i-1} L_i}{6 E I_i} - \frac{M_i L_i}{3 E I_i} = \frac{A_{i+1} b_{i+1}}{L_{i+1} E I_{i+1}} + \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{6 E I_{i+1}} + \frac{M_i L_{i+1}}{3 E I_{i+1}} \quad (25)$$

A expressão (25) pode ser reescrita como:

$$\frac{L_i}{I_j} M_{i-1} + 2 \left(\frac{L_i}{I_j} + \frac{L_{i+i}}{I_{i+1}} \right) M_i + \frac{L_{i+1}}{I_{i+1}} M_{i+1} = -\frac{6A_i a_i}{L_i I_j} - \frac{6A_{i+1} b_{i+1}}{L_{i+1} I_{i+1}} \quad (26)$$

A expressão (26) é conhecida como *Equação dos 3 momentos*, e deve ser usada em número de vezes $n - 1$, assim, tem-se tantas equações quantos forem os momentos fletores desconhecidos nas seções correspondentes aos apoios centrais da viga.

Para o caso particular em que todos os vãos possuem a mesma seção transversal (e portanto o mesmo momento de inércia), a expressão (26) é reescrita como:

$$L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+i}) M_i + L_{i+1} M_{i+1} = -\frac{6A_i a_i}{L_i} - \frac{6A_{i+1} b_{i+1}}{L_{i+1}} \quad (27)$$

As parcelas que constam na direita da das expressões (26) e (27) podem ser escritas como:

$$\alpha_i = \frac{6A_i a_i}{L_i} \quad (28)$$

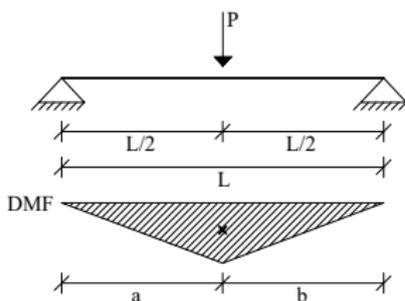
$$\beta_{i+1} = \frac{6A_{i+1} b_{i+1}}{L_{i+1}} \quad (29)$$

Assim, as expressões (26) e (27) podem ser reescritas como:

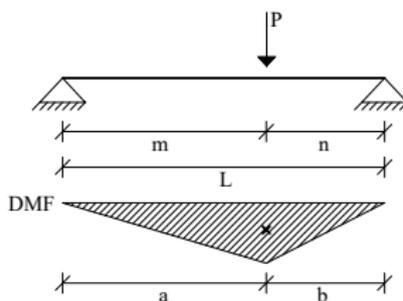
$$\frac{L_j}{l_j} M_{i-1} + 2 \left(\frac{L_j}{l_j} + \frac{L_{j+i}}{l_{j+i}} \right) M_i + \frac{L_{j+1}}{l_{j+1}} M_{i+1} = -\frac{\alpha_j}{l_j} - \frac{\beta_{j+1}}{l_{j+1}} \quad (30)$$

$$L_j M_{i-1} + 2(L_j + L_{j+i}) M_i + L_{j+1} M_{i+1} = -\alpha_j - \beta_{j+1} \quad (31)$$

A seguir são apresentadas expressões α e β para 3 casos comuns de carregamento.

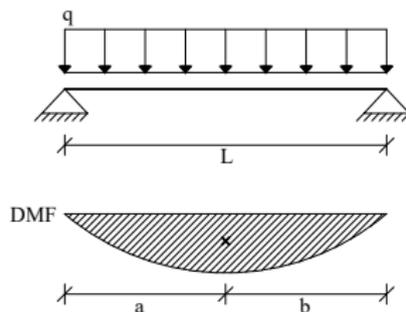


$$\alpha = \beta = \frac{3PL^2}{8}$$



$$\alpha = \frac{Pmn(L+m)}{L}$$

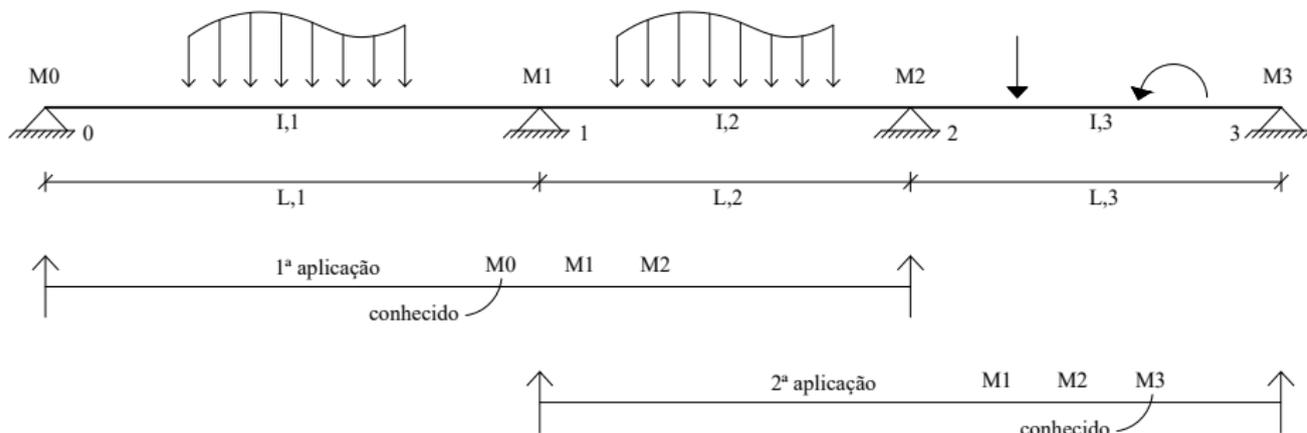
$$\beta = \frac{Pmn(L+n)}{L}$$



$$\alpha = \beta = \frac{qL^3}{4}$$

Aplicações

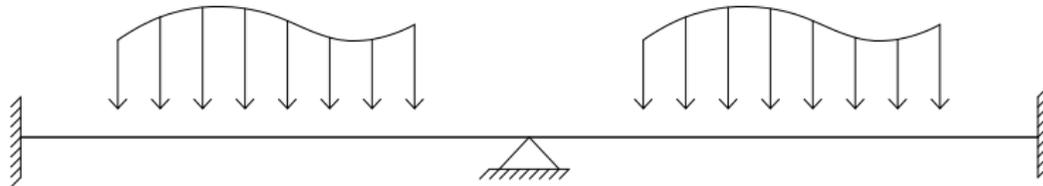
Para se calcular os momentos fletores em todos os apoios de uma viga contínua, deve-se aplicar a equação dos três momentos em vãos subsequentes dois a dois. O resultado é que o número total de aplicações é igual ao número de vãos menos um. Por exemplo, para uma viga de 3 vãos:



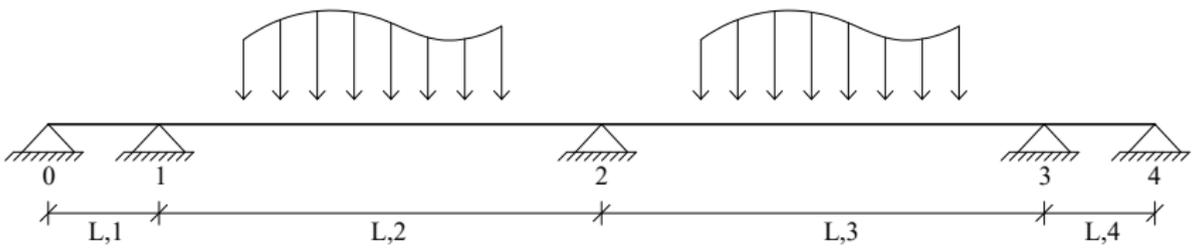
Com as duas aplicações, fica-se com duas equações dos três momentos, uma para cada aplicação e duas incógnitas (M_1 e M_2), já que M_0 e M_3 são previamente conhecidos.

Viga com engaste nas extremidades

A imagem abaixo mostra uma viga que possui engaste nos apoios das extremidades:



Neste tipo de situação, o artifício é substituir o engaste por um vão fictício ao lado engastado:

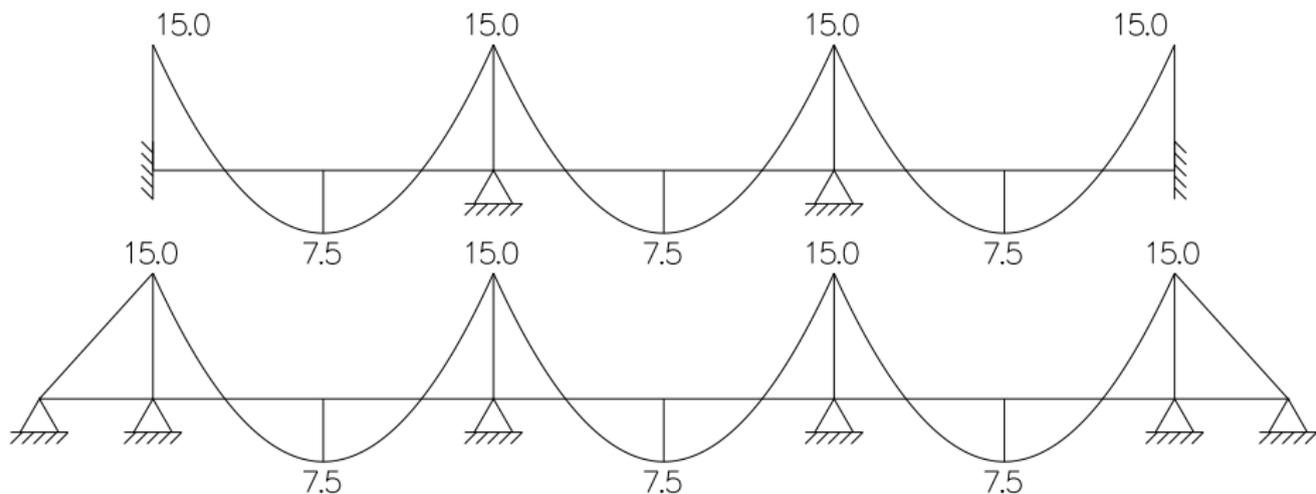


Para que ambas as vigas possuam deslocamentos e esforços iguais, é necessário que os vãos criados possuam uma grande rigidez (infinita, teoricamente), impedindo a rotação da seção onde havia o engaste.

A grande rigidez, mencionada no slide anterior pode-se dar de duas formas: aumentando o produto EI ou reduzindo-se o comprimento do elemento.

Para exemplificar o mencionado acima, observa-se os dois diagramas de momento fletor que seguem. O procedimento adotado foi adotar valores grandes para o produto EI dos vãos teóricos criados, sendo:

- para a viga original (superior): $EI = 26.666,66 \text{ kNm}^2$;
- para a viga teórica (inferior): para os vãos internos $EI = 26.666,66 \text{ kNm}^2$, para os vãos fictícios $EI = 6,5e9 \text{ kNm}^2$



- 1 Introdução
- 2 Método de Cross
- 3 Método dos três momentos
- 4 Equação da linha elástica**
- 5 Cálculo de deformações via métodos energéticos
- 6 Flambagem
- 7 Referências

Como já visto na disciplina de Resistência dos Materiais I, uma viga prismática, submetida à flexão pura, é flexionada em um arco de circunferência e que, dentro do regime elástico, a curvatura é expressar por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I} \quad (32)$$

Quando uma viga é submetida a um carregamento transversal, a expressão (32) permanece válida para qualquer seção transversal, desde que se aplique o princípio de Saint-Venant. No entanto, o momento fletor e a curvatura da superfície neutra variam de uma seção para outra. Chamando de x a distância da seção a partir da extremidade esquerda da viga, escreve-se:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{E \cdot I} \quad (33)$$

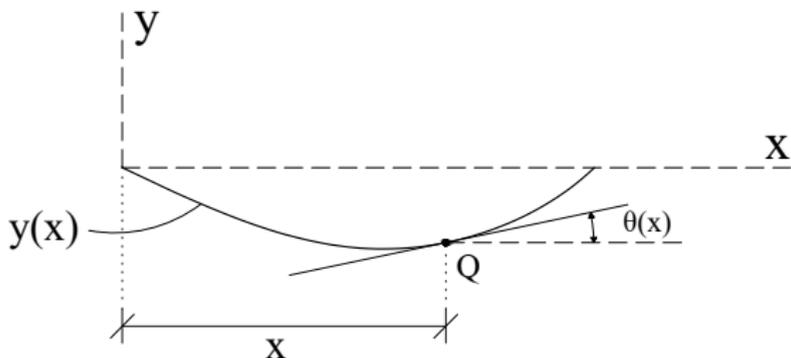
Para determinar a declividade e a deflexão de vigas em um determinado ponto, inicialmente é necessário deduzir a equação diferencial de segunda ordem, dada a seguir, que governa a *linha elástica* e caracteriza a forma da viga deformada:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{E \cdot I} \quad (34)$$

O produto EI é a rigidez à flexão, sendo a seção transversal constante ao longo da viga e multiplicando os dois lados por EI e integrando em x :

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1 \quad (35)$$

Onde C_1 é uma constante de integração. Chamando de $\phi(x)$ o ângulo, medido em radianos, que a tangente com a linha elástica em Q forma com a horizontal:



e lembrando que esse ângulo é muito pequeno, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \phi \simeq \phi(x) \quad (36)$$

Considerando a expressão (36), pode-se reescrever (35):

$$EI \cdot \phi(x) = \int_0^x M(x) dx + C_1 \quad (37)$$

Integrando os membros da expressão (37), tem-se:

$$EI \cdot y = \int_0^x \left[\int_0^x M(x) dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad (38)$$

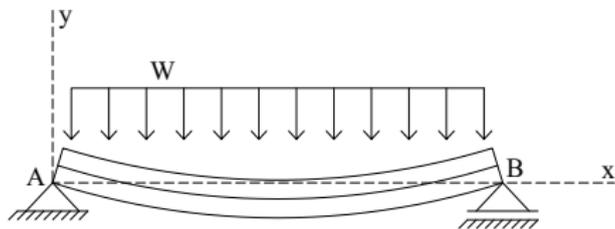
$$EI \cdot y = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + C_1 x + C_2 \quad (39)$$

Onde C_2 é uma segunda constante de integração.

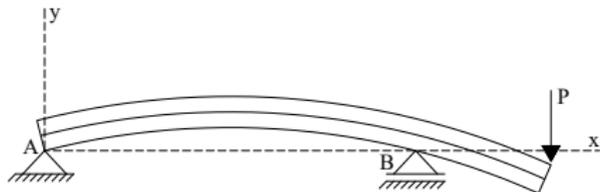
As constantes C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno, ou, mais precisamente, pelas condições impostas à viga pelos seus apoios.

As imagens que seguem mostram as condições de contorno para algumas vigas isostáticas.

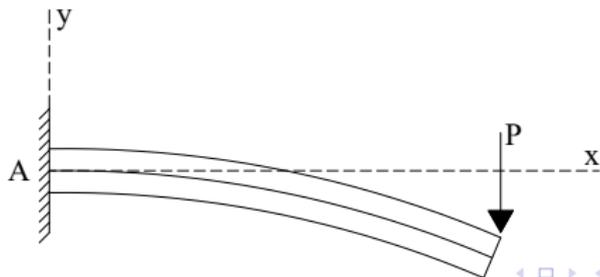
Para a viga abaixo: $y_A = 0$ e $y_B = 0$



Para a viga abaixo: $y_A = 0$ e $y_B = 0$



Para a viga abaixo: $y_A = 0$ e $\theta_A = 0$



Vigas hiperestáticas (estaticamente indeterminadas)

A imagem abaixo mostra uma viga que possui:

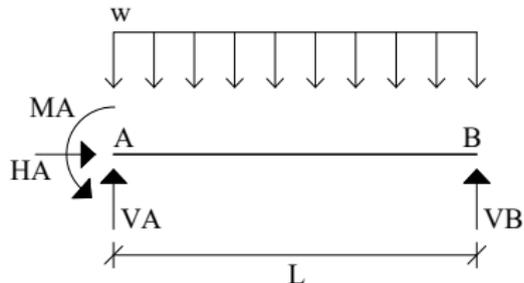
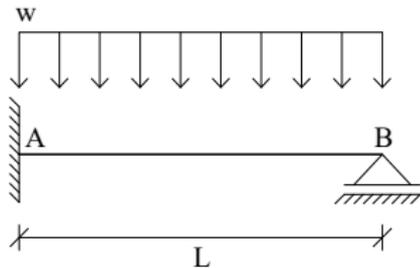
- número de incógnitas:

$$4 - (H_A, V_A, M_A, V_B)$$

- número de equações:

$$3 - (\sum F_x, \sum F_y, \sum M)$$

Então, tem-se $4 - 3 = 1$, ou seja, *grau de indeterminação um ou um grau de hiperestaticidade*.

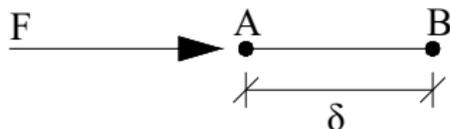


As reações deste problema estaticamente indeterminado podem ser obtidas se forem consideradas as deformações na estrutura. Assim, deve-se proceder à determinação das flechas e declividades ao longo da viga.

- 1 Introdução
- 2 Método de Cross
- 3 Método dos três momentos
- 4 Equação da linha elástica
- 5 Cálculo de deformações via métodos energéticos**
- 6 Flambagem
- 7 Referências

Trabalho de uma força e trabalho de um momento

Conforme Hibbeler (2004), na mecânica, uma força realiza *trabalho* quando sofre um deslocamento na mesma direção dela.



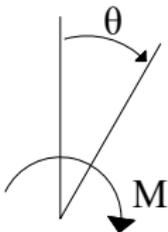
Se a força é constante, o trabalho W é expresso por:

$$W = F \cdot \delta \quad (40)$$

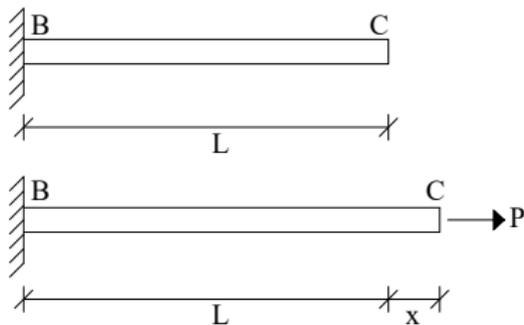
O trabalho é positivo quando a força e o deslocamento estão na mesma direção, e negativo quando contrário.

O mesmo serve para um momento M e um deslocamento angular θ :

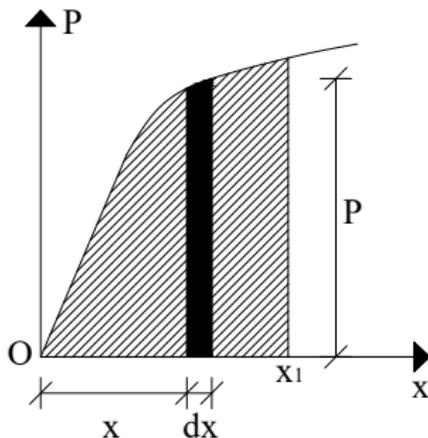
$$W = M \cdot \theta \quad (41)$$



A imagem abaixo mostra uma barra com seção transversal constante, submetida a uma carga P que cresce lentamente:



Chamando de x o alongamento da barra, pode-se desenhar o diagrama:



O trabalho elementar dU feito pela força \mathbf{P} à medida que a barra se alonga de um pequeno valor dx é igual ao produto da intensidade P pelo pequeno alongamento dx :

$$dU = P \cdot dx \quad (42)$$

O trabalho total U feito pela força enquanto a barra sofre a deformação x_1 é:

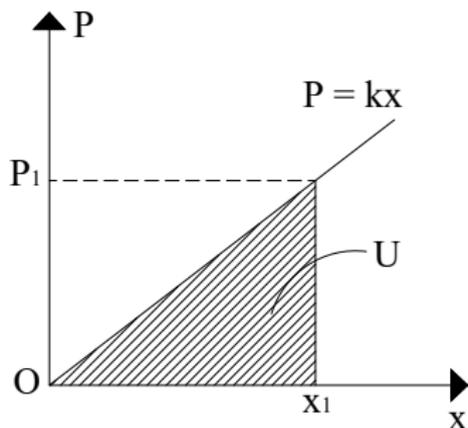
$$U = \int_0^{x_1} P \cdot dx \quad (43)$$

O trabalho feito pela força \mathbf{P} enquanto ela é aplicada lentamente à barra deve resultar no aumento de algum tipo de energia associada à deformação da barra. Essa energia é conhecida como energia de deformação da barra:

$$U = \int_0^{x_1} P \cdot dx \quad (44)$$

O trabalho e a energia de deformação devem ser expressos em medidas obtidas multiplicando-se unidades de comprimento por unidades de força. No sistema internacional ($N \cdot m$), que é chamada de *Joule* (J).

A imagem abaixo mostra uma relação força-deformação linear:



Neste caso, a parte do diagrama força-deformação envolvida pode ser representada por uma linha reta cuja equação é $P = kx$. Substituindo P na expressão (44):

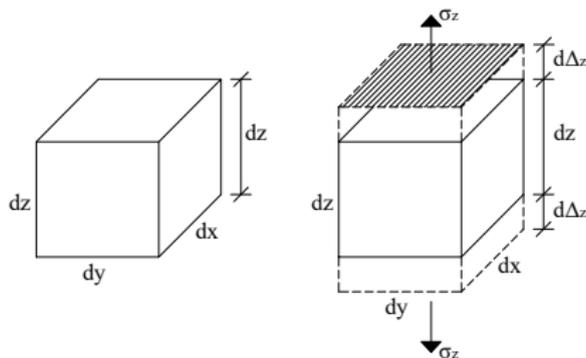
$$U = \int_0^{x_1} kx \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 \quad (45)$$

sendo $k = P_1/x_1$, reescreve-se (45):

$$U = \frac{1}{2} P_1 \cdot x_1 \quad (46)$$

Energia de deformação - tensão normal

A imagem abaixo mostra um elemento submetido a uma tensão normal:



A força criada nas faces é dada por:

$$dF_z = \sigma_z \cdot dA = \sigma_z \cdot dx \cdot dy \quad (47)$$

Se a força for aplicada gradualmente de zero até dF , o elemento sofrerá um deslocamento:

$$d\Delta_z = \varepsilon_z \cdot dz \quad (48)$$

Assim, o trabalho dU_i fica dado por:

$$dU_i = \frac{1}{2} \cdot dF_z \cdot d\Delta_z \quad (49)$$

A expressão (49) pode ser reescrita utilizando (47) e (48):

$$dU_i = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_z \cdot dx \cdot dy) \cdot (\varepsilon_z \cdot dz) \quad (50)$$

Sendo o volume do elemento dado por:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \quad (51)$$

A expressão (50) pode ser reescrita:

$$dU_i = \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \cdot \varepsilon_z \cdot dV \quad (52)$$

Em geral, se o corpo estiver submetido apenas a uma tensão normal σ , a energia de deformação nele armazenada será:

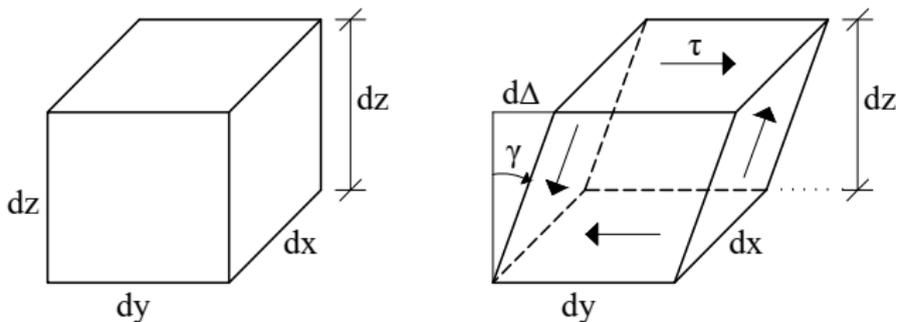
$$U_i = \int_V \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} dV \quad (53)$$

Sendo a lei de Hooke válida ($\sigma = E \cdot \varepsilon$), reescreve-se (53):

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} dV \quad (54)$$

Energia de deformação - tensão de cisalhamento

A imagem abaixo mostra um elemento submetido a tensão de cisalhamento:



A força criada na face superior é dada por:

$$dF = \tau \cdot dA = \tau \cdot (dx \cdot dy) \quad (55)$$

Nota-se que a força que atua na face superior desloca a mesma em relação a inferior. Para pequenos deslocamentos:

$$d\Delta_z = \gamma \cdot dz \quad (56)$$

Assim, a energia de deformação armazenada é:

$$dU_i = \frac{1}{2} \cdot dF \cdot d\Delta_z \quad (57)$$

A expressão (57) pode ser reescrita utilizando (55) e (56):

$$dU_i = \frac{1}{2} \cdot [\tau \cdot (dx \cdot dy)] \cdot (\gamma \cdot dz) \quad (58)$$

Sendo o volume do elemento dado por:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \quad (59)$$

A expressão (58) pode ser reescrita:

$$dU_i = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \cdot dV \quad (60)$$

Integrando em todo o volume do corpo para obter a energia de deformação nele armazenada, tem-se:

$$U_i = \int_V \frac{\tau \cdot \gamma}{2} dV \quad (61)$$

Sendo a lei de Hooke válida ($\gamma = \tau/G$), reescreve-se (61):

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2 \cdot G} dV \quad (62)$$

Energia de deformação - carga axial

Relembrando a expressão (54):

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} dV$$

Considerando que a tensão causada por uma carga axial é dada por:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (63)$$

A expressão (54) pode ser reescrita:

$$U_i = \int_V \frac{(N/A)^2}{2 \cdot E} dV \quad (64)$$

Sendo dV dado por:

$$dV = A \cdot dx \quad (65)$$

Reescrevendo a expressão (64):

$$U_i = \int_0^L \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} dx \quad (66)$$

Energia de deformação - momento fletor

Relembrando a expressão (54):

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} dV$$

Considerando que a tensão causada por um momento fletor é dada por:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \quad (67)$$

A expressão (54) pode ser reescrita:

$$U_i = \int_V \frac{M^2 \cdot y^2}{2 \cdot E \cdot I^2} dV \quad (68)$$

Sendo dV dado na expressão (65), pode-se reescrever (68):

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\int y^2 dA \right) dx \quad (69)$$

Sabendo que $I = \int y^2 dA$, reescreve-se (69):

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot I} dx \quad (70)$$

Energia de deformação - esforço cortante

Considerando que a tensão causada por um esforço cortante é dada por:

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t} \quad (71)$$

A expressão (62) pode ser reescrita:

$$U_i = \int_V \frac{V^2 \cdot Q^2}{2 \cdot G \cdot I^2 \cdot t^2} dV \quad (72)$$

Sendo dV dado na expressão (65), pode-se reescrever (72):

$$U_i = \int_0^L \frac{V^2}{2 \cdot G \cdot I} \cdot \left(\int \frac{Q^2}{t^2} dA \right) dx \quad (73)$$

Sabendo que:

$$f_s = \frac{A}{I^2} \cdot \int \frac{Q^2}{t^2} dA \quad (74)$$

A expressão (73) pode ser reescrita:

$$U_i = \int_0^L f_s \cdot \frac{V^2}{2 \cdot G \cdot A} dx \quad (75)$$

Energia de deformação - esforço de torção

Relembrando a expressão (62):

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2 \cdot G} dV$$

Considerando que a tensão causada por um esforço de torção é dada por:

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J} \quad (76)$$

A expressão (62) pode ser reescrita:

$$U_i = \int_V \frac{T^2 \cdot \rho^2}{2 \cdot G \cdot J^2} dV \quad (77)$$

Sendo dV dado na expressão (65), pode-se reescrever (77):

$$U_i = \int_0^L \frac{T^2}{2 \cdot G \cdot J^2} \cdot \left(\int \rho^2 dA \right) dx \quad (78)$$

A expressão (78) pode ser reescrita:

$$U_i = \int_0^L \frac{T^2}{2 \cdot G \cdot J} dx \quad (79)$$

Energia de deformação - caso geral

Reunindo todas as expressões para a energia de deformação dos esforços axial, cortante, momento fletor e momento torçor:

$$U_i = \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dx + \int_0^L f_s \cdot \frac{V^2}{2GA} dx + \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \quad (80)$$

Onde:

U_i - energia de deformação da barra i ;

N, V, M, T - esforços normal, cortante, momento fletor e momento torçor;

A - área de seção transversal;

E - módulo de elasticidade longitudinal;

G - módulo de elasticidade transversal;

I - momento de inércia;

J - momento polar de inércia;

L - comprimento da barra;

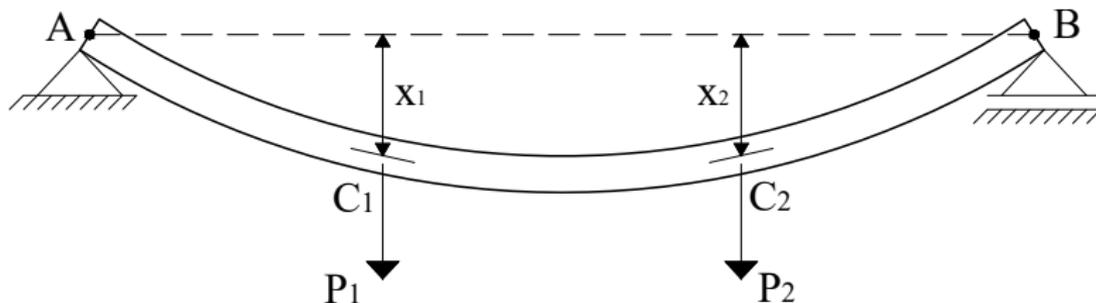
f_s - fator de forma, dados por:

Seção	retangular	circular	tubo fino	perfil caixa ou I
f_s	6/5	10/9	2	A/Aalma

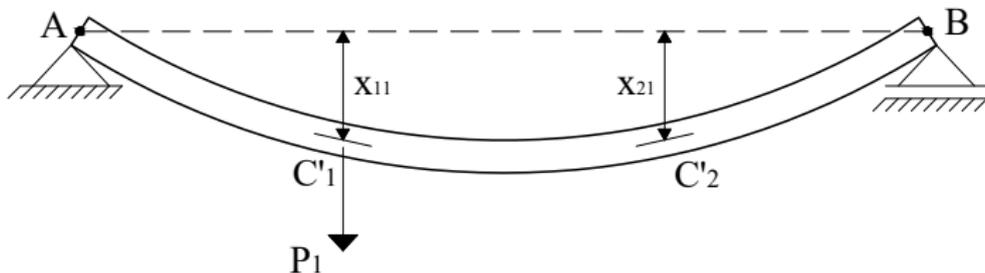
Trabalho e energia sob várias cargas

Os textos que seguem são baseados em Beer et al. (2013).

Considere uma viga elástica AB submetida a duas forças concentradas P_1 e P_2 . A energia de deformação da viga é igual ao trabalho de P_1 e P_2 quando são aplicadas lentamente à viga em C_1 e C_2 , respectivamente.



Considerando que somente P_1 é aplicada na viga:



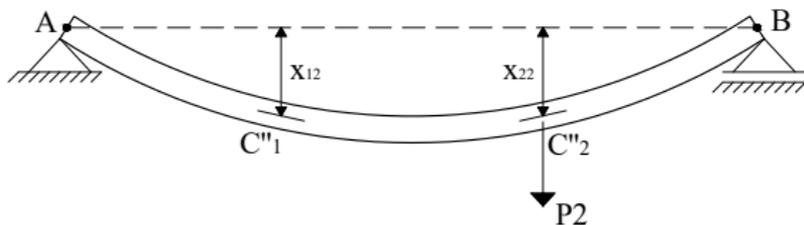
Os pontos C_1 e C_2 se deslocam proporcionalmente à força P_1 . Chamando de x_{11} e x_{21} essas deflexões:

$$x_{11} = \alpha_{11} \cdot P_1 \quad (81)$$

$$x_{21} = \alpha_{21} \cdot P_1 \quad (82)$$

Em que α_{11} e α_{21} são os *coeficientes de influência*. Essas constantes representam as deflexões de C_1 e C_2 , respectivamente, quando uma força unitária é aplicada em C_1 .

Considerando que somente P_2 é aplicada na viga:



Os pontos C_1 e C_2 se deslocam proporcionalmente à força P_2 . Chamando de x_{12} e x_{22} essas deflexões:

$$x_{12} = \alpha_{12} \cdot P_2 \quad (83)$$

$$x_{22} = \alpha_{22} \cdot P_2 \quad (84)$$

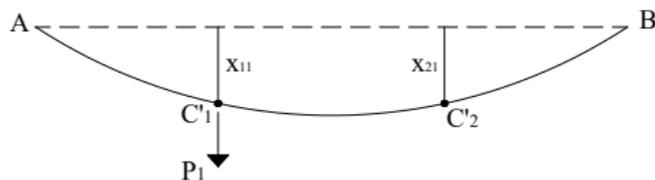
Em que α_{12} e α_{22} são os coeficientes de influência representando as deflexões de C_1 e C_2 , respectivamente, quando uma força unitária é aplicada em C_2 .

Aplicando o princípio da superposição dos efeitos, expressa-se as deflexões x_1 e x_2 de C_1 e C_2 quando ambas as forças são aplicadas:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \alpha_{11} \cdot P_1 + \alpha_{12} \cdot P_2 \quad (85)$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \alpha_{21} \cdot P_1 + \alpha_{22} \cdot P_2 \quad (86)$$

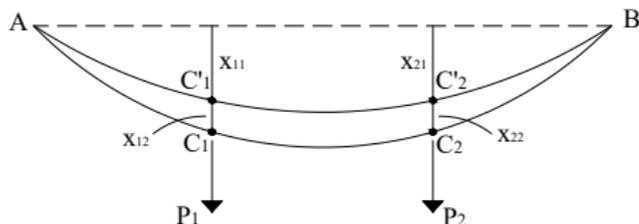
Para calcular o trabalho, considera-se aplicada apenas P_1 inicialmente:



O trabalho da carga P_1 fica dado por:

$$\frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot x_{11} = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot (\alpha_{11} \cdot P_1) = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{11} \cdot P_1^2 \quad (87)$$

A carga P_2 não executa trabalho pois a mesma, ainda, não foi aplicada. Ao aplicar lentamente a carga P_2 em C_2 :



O trabalho de P_2 é expresso como:

$$\frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot x_{22} = \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot (\alpha_{22} \cdot P_2) = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{22} \cdot P_2^2 \quad (88)$$

Quando P_2 é aplicada lentamente em C_2 , o ponto de aplicação de P_1 move-se um valor de x_{12} , de C'_1 a C_1 , e a força P_1 realiza trabalho. Como P_1 é aplicada durante todo esse deslocamento, seu trabalho é igual a $P_1 \cdot x_{12}$:

$$P_1 \cdot x_{12} = P_1 \cdot (\alpha_{12} \cdot P_2) = \alpha_{12} \cdot P_1 \cdot P_2 \quad (89)$$

Somando as expressões obtidas (87), (88) e (89), expressa-se a energia de deformação da viga quando atuam nela as forças P_1 e P_2 :

$$U = \frac{1}{2} \cdot (\alpha_{11} \cdot P_1^2 + 2 \cdot \alpha_{12} \cdot P_1 \cdot P_2 + \alpha_{22} \cdot P_2^2) \quad (90)$$

Pode-se demonstrar que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$.

Teorema de Castigliano

Conforme visto, a expressão obtida para a energia de deformação (90) de uma estrutura elástica submetida a duas forças P_1 e P_2 é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \cdot (\alpha_{11} \cdot P_1^2 + 2 \cdot \alpha_{12} \cdot P_1 \cdot P_2 + \alpha_{22} \cdot P_2^2)$$

Derivando ambos os membros da expressão (90) em relação a P_1 :

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11} \cdot P_1 + \alpha_{12} \cdot P_2 = x_1 \quad (91)$$

Derivando ambos os membros da expressão (90) em relação a P_2 :

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12} \cdot P_1 + \alpha_{22} \cdot P_2 = x_2 \quad (92)$$

De um modo mais geral, se uma estrutura elástica é submetida a n cargas P_1, P_2, \dots, P_n a deformação x_j do ponto de aplicação de P_j , pode ser expressa como a derivada parcial da energia de deformação da estrutura em relação à força P_j . Escreve-se:

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \quad (93)$$

Que é conhecido como *Teorema de Castigliano*.

Relembrando a expressão (41):

$$W = M \cdot \theta$$

em que θ é o ângulo de rotação no ponto em que o momento é aplicado lentamente. Observa-se que o teorema de Castigliano pode ser usado para determinar a inclinação de uma viga no ponto de aplicação do momento M_j . Tem-se:

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \quad (94)$$

De maneira similar, o ângulo de torção ϕ_j em uma seção de um eixo em que a torção T_j é aplicada lentamente é obtido derivando-se a energia de deformação do eixo em relação a T_j :

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \quad (95)$$

Cálculo de deflexões pelo Teorema de Castigliano

O cálculo da deflexão x_j pelo Teorema de Castigliano é simplificado se a derivada em relação à força P_j é feita antes da integração ou soma. Para uma viga, por exemplo:

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx \quad (96)$$

Generalizando-se, então, tem-se:

$$x_j = \int_0^L \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_j} dx + \int_0^L f_s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial P_j} dx + \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx + \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial P_j} dx \quad (97)$$

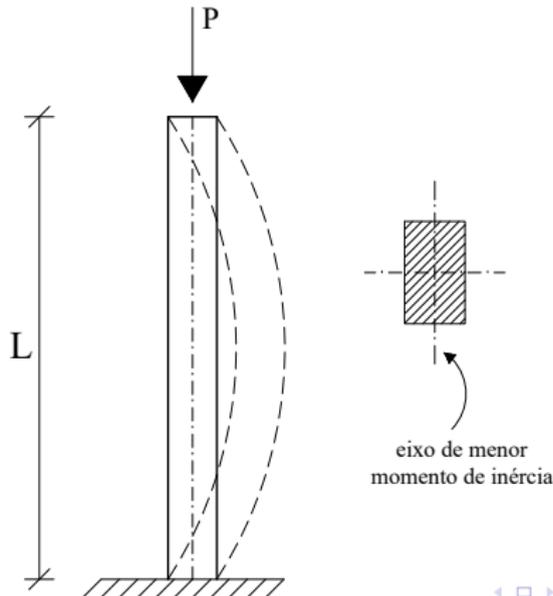
As variáveis que aparecem na expressão (97) já foram identificadas em (80).

- 1 Introdução
- 2 Método de Cross
- 3 Método dos três momentos
- 4 Equação da linha elástica
- 5 Cálculo de deformações via métodos energéticos
- 6 Flambagem**
- 7 Referências

Flambagem - conceituação

A flambagem consiste na deformação de uma peça, causada por uma força de compressão axial. Como consequência, o elemento pode perder sua estabilidade (sofrer um colapso) sem que o material atinja o limite de escoamento.

Este colapso sempre ocorrerá na direção do eixo de menor momento de inércia de sua seção transversal.



Flambagem - carga crítica

A flambagem somente irá ocorrer caso a carga axial P que está atuando sobre o elemento for maior que uma determinada carga limite, chamada carga crítica, ou seja:

Se $P \geq P_{cr} \rightarrow$ ocorre a flambagem

Euler (1707 - 1783) foi o primeiro a estudar o fenômeno da flambagem, e determinou a fórmula da carga crítica nas peças carregadas axialmente:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2} \quad (98)$$

Onde:

P_{cr} - carga crítica de flambagem;

E - módulo de elasticidade longitudinal;

A - área de seção transversal;

λ - índice de esbeltez.

Flambagem - índice de esbeltez

O índice de esbeltez mede a dificuldade que um elemento tem de flambar e é definido como sendo a relação entre o comprimento de flambagem (l_f) e o raio de giração (R) da seção transversal do elemento. Este índice é dado por:

$$\lambda = \frac{l_f}{R} \quad (99)$$

Onde:

λ - índice de esbeltez;

l_f - comprimento de flambagem;

R - raio de giração.

O raio de giração é dado por:

$$R = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} \quad (100)$$

Através da expressão da carga crítica, pode-se verificar que quanto maior o índice de esbeltez, menor o valor da carga crítica, logo, maior é a possibilidade de ocorrer a flambagem.

A expressão (99) pode ser reescrita utilizando a expressão do raio de giração (100):

$$\lambda = \frac{l_f}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} \quad (101)$$

Fazendo λ^2 , tem-se:

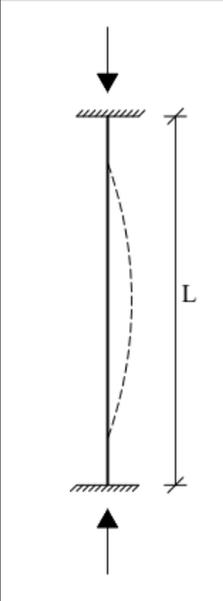
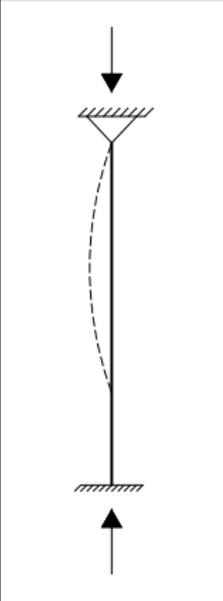
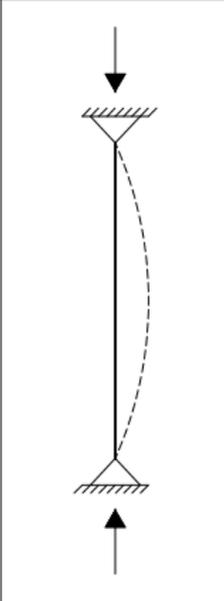
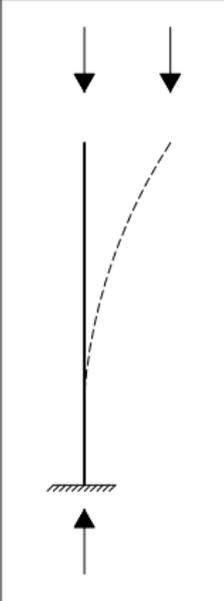
$$\lambda^2 = \frac{l_f^2}{\left(\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}\right)^2} = \frac{l_f^2 \cdot A}{I_{min}} \quad (102)$$

Reescrevendo a expressão (98):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\frac{l_f^2 \cdot A}{I_{min}}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A \cdot I_{min}}{l_f^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2} \quad (103)$$

Comprimento de flambagem

O comprimento de flambagem (l_f) é obtido em função do tipo de vinculação existente em suas extremidades.

Tipos de vinculação (a forma flambada é mostrada pela linha tracejada)				
	l_f	$0,5 \cdot L$	$0,7 \cdot L$	L

- 1 Introdução
- 2 Método de Cross
- 3 Método dos três momentos
- 4 Equação da linha elástica
- 5 Cálculo de deformações via métodos energéticos
- 6 Flambagem
- 7 Referências**

SUSSEKIND, José Carlos. **Curso de análise estrutural: método das deformações e processo de Cross**. 3. ed. Porto Alegre: Globo, 1987.

BEER, Ferdinand P.; DEWOLF, John T.; JOHNSTON JR., E. Russel; MAZUREK, David F. **Estática e mecânica dos materiais**. 3. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2013.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.